Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

LA MODELACIÓN Y LA GRAFICACIÓN EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR[1]

Francisco Cordero Osorio

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

Con la aproximación socioepistemológica, cuyo planteamiento fundamental consiste en asumir que el conocimiento matemático se construye a través de prácticas sociales, se enfoca la atención al uso de las gráficas en la modelación generada por la tecnología educativa. Con ello, se plantea la necesidad de establecer al binomio modelación-graficación como una categoría de la matemática escolar.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente la modelación se encuentra en auge en las actividades de enseñanza de la matemática, sobre todo cuando a éstas se les incorpora la tecnología de sensores y calculadoras graficadoras. Por ello, las concepciones de modelación están jugando un papel importante en la disciplina de la Matemática Educativa.

Tales concepciones tensan aspectos sobre lo que se entiende como conocimiento matemático. Una de las creencias frecuentes en las prácticas de enseñanza de la matemática consiste en que la modelación es una aplicación de la matemática. Ello conlleva, primero, a enseñar matemáticas y después, a buscar la aplicación de tal conocimiento. Contrariamente a tal idea, en este artículo explicaremos que la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, actualmente, este hecho no ha compuesto un eje didáctico que norme el currículo escolar. Ejemplificaremos, cómo es que

[1] This research is funded under a grant from the CONACYT about project: Construcción social del conocimiento matemático avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad y la obsolescencia de situaciones didácticas: de la investigación a la realidad del aula (CLAVE: 41740-S).

el uso de las gráficas que se suele incorporar a las prácticas de enseñar y aprender matemáticas es un tipo de modelación y su posibilidad de formularlo como un eje didáctico. Particularmente, enfocaremos la atención a los siguientes dos aspectos de la graficación:

- La variación de parámetros de una función *f;* $y = Af(Bx + C) + D$. La graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable.

- La linealidad del polinomio; $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. La graficación es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

Con este marco, cuestionaremos la pertinencia de construir escenarios educativos donde se haga explícita la modelación matemática, a través de tres grandes preguntas: ¿Qué quiere decir modelación en la enseñanza de las matemáticas?; ¿Cuál es su relación con la tecnología? y ¿Cuáles deberán ser los cambios curriculares?

2. ¿QUÉ QUIERE DECIR MODELACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS?

El sentido de la pegunta va enfocado a entender la modelación en el ámbito de la enseñanza de la matemática. Para ello, en cualquier explicación que intentemos propiciar será necesario considerar lo que se entiende por conocimiento matemático y determinar su problemática de la enseñanza. Esto debido a que, *grosso modo*, hay dos grandes perspectivas que se ponen en juego cuando se habla de conocimiento. Una abraza la idea de que el conocimiento es una representación de la realidad, y la otra que el conocimiento es una producción material que cambia y transforma la naturaleza y la sociedad. Estas ideas ponen en tensión dos nociones de realidad, la primera, admite que la realidad preexiste al conocimiento y la segunda, admite que la realidad se construye a la par del conocimiento.

Una acepción de modelación que se ha visto favorecida por la primera idea, en la enseñanza de las matemáticas, es aquella que propicia acciones que determinan que "cierta cosa debe ser imitada". En ese sentido la modelación es una "representación" y en consecuencia la modelación se convierte en una "aplicación de la matemática". Los entrecomillados requieren una explicación cuidadosa, sobre todo porque se está pensando en la enseñanza de las matemáticas.

La acepción más común de modelación tal vez provenga del significado de modelo, que muchas veces es considerado como copia de algo para ser reproducido. En el campo de la matemática suele definirse a la modelación como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas. Ambas acepciones, exigen de un objeto predeterminado, ya sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos, de ahí lo cualitativo. Tal vez por ello, en el oficio de la modelación aparece en forma significativa el concepto de representación, y algunas veces la modelación es explicada como la representación del objeto en cuestión. En consecuencia, el tratamiento de la modelación en la enseñanza de las matemáticas es considerada como una herramienta didáctica que ayudará al estudiante a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto matemático. Las investigaciones en el campo de la matemática educativa en este tópico analizan la estructura de tales representaciones e identifican sus registros semánticos para establecer relaciones con los procesos cognitivos de los individuos (Blum et al, 2002).

Por ejemplo, la parábola con esta perspectiva es un objeto matemático, la enseñanza de la matemática tiene la responsabilidad de encontrar la didáctica adecuada para que el estudiante construya tal objeto. La ecuación cuadrática, las fórmulas, las tablas y las gráficas cartesianas son las diversas representaciones de la parábola. Para que el estudiante construya el objeto parábola requiere transitar por las diferentes representaciones. Cada una de estas representaciones establece ciertas propiedades del objeto, interpretadas como los procesos que componen a éste (Campos, 2003). Para tal fin, la modelación interviene como un medio (herramienta) facilitador en tal tránsito. Este medio viene a ser el conjunto de las situaciones representadas por la parábola. Tales situaciones se convierten en sitios geométricos o de la física, como el movimiento de una partícula. De esta manera, en la enseñanza, las actividades de modelación favorecen una marcada dirección en la relación del objeto y la situación: dada la parábola se le encuentra "utilidad" en la situación. Así, la modelación es connotada como un tipo de aplicación matemática. Se le encuentra significado al objeto matemático en función de su utilidad externa al objeto (Blum et al, 2002).

Seguramente todo ello marca un alivio a la enseñanza de las matemáticas, pero cuál es la problemática de ésta.

Para trazar el planteamiento al respecto, creemos conveniente considerar la siguiente demanda social: los profesores de matemáticas piden a los educadores que les ofrezcan métodos para "enseñar mejor", y los estudiantes suelen preguntar a los profesores para qué "sirve el conocimiento matemático", ambos exigen explicaciones claras, sin recibirlas. Lejos de proponernos a responder cabalmente tal demanda, intentamos entender su legitimidad.

Tanto los profesores como los estudiantes señalan cierta connotación del conocimiento matemático. Por un lado, el profesor, en su acción de enseñar las matemáticas, considera a esta materia como una actividad de servicio. Esto significa que el campo de conocimiento está en otro sitio, por ejemplo, la matemática, la ingeniería, la física, entre otras, es el campo de conocimiento no así la enseñanza de las matemáticas, no se alcanza a ver a la matemática escolar como un campo de conocimiento. Mientras que, por otro lado, el estudiante, envuelto en el discurso escolar, considera tal materia como un conocimiento utilitario. Esto quiere decir que el estudiante exige, equivocadamente, que la matemática escolar le responda a ciertas necesidades "inmutables" de su vida cotidiana. Por ejemplo, entiende que la matemática le ayuda hacer ciertas operaciones aritméticas, que le responde a ciertas necesidades de consumo de su vida cotidiana, pero no así las propiedades de la parábola, ni, mucho menos, "trazar rectas tangentes en un punto sobre la curva".

Esta demanda social, señala una inclinación prolongada hacia concebir al conocimiento matemático en el sistema educativo como un servicio. Tal vez por ello, cuando se aborda una problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática, no se demanda entenderla como un pensamiento, como una cultura o como una institución. No se trata de soslayarla, sino de incorporarla a un cuerpo que permita entender y atender tal demanda. En todo caso, hay que entender el rol de servicio en el pensamiento, en la cultura y en la institución como todo saber funcional, que se desarrolla y se integra a la vida para transformarla y reconstruye significados permanentemente en la vida. De lo contrario se corre el riesgo de fomentar, en el sistema educativo, la matemática como un conocimiento utilitario. La problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es algo más robusto para sólo dejarlo del lado de las teorías educativas o psicológicas. Si realmente queremos que los estudiantes valoren socialmente el conocimiento matemático es necesario arrancar su concepción del nivel utilitario de tal conocimiento y llevarlos al nivel funcional. Deberemos encontrar los indicadores para que el sistema educativo logre el nivel funcional de la matemática.

Dicho nivel quiere decir integrar orgánicamente tal conocimiento a la vida para transformarla. El sistema educativo debe ayudar a hacer tal saber útil (no utilitario). Para ello, toda relación didáctica debe ser entendida como una construcción del conocimiento en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural. Es así como se deberá enfocar la problemática en el *uso del conocimiento matemático en las situaciones en cuestión,* para entender cómo debate, tal conocimiento matemático, entre su función y su forma de acorde con lo que organizan los participantes. A tal aspecto hemos convenido en llamarle *resignificación.* Entonces debemos ir creando marcos de referencia, en el sistema educativo, que ayuden a resignificar el conocimiento matemático.

En ese sentido, la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, tiene que ser una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión. Por ejemplo, la graficación es la argumentación de ciertas situaciones de Cálculo. Ahí, las gráficas de las funciones formulan argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los estudiantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente. Existen materiales didácticos con tales ideas y sustentadas por investigaciones previas, que ofrecen secuencias de actividades que puedan llevarse a cabo en el salón de clases (ver por ejemplo, Cordero y Solís, 2001, y Cantoral y Montiel, 2001). Las actividades se componen de cuestiones con relación a los comportamientos de las funciones que pueden discutirse a través del uso de calculadoras que grafican funciones. En cada actividad se sugieren algunas instrucciones y programas con el uso de calculadoras con la intención de hacer más eficiente el tratamiento de las gráficas de las funciones. Sin embargo, es el contenido matemático el aspecto principal de la secuencia de actividades. Éstas han sido diseñadas con el propósito de favorecer procedimientos para que el estudiante formule propiedades de las funciones a través del comportamiento de sus gráficas. Los significados de las funciones que construyen los estudiantes corresponden a ideas globales, las funciones son concebidas como curvas limitadas por ventanas y no sólo como fórmulas. El recurso de hacer operaciones algebraicas para evaluar la función ("si $x = a$ entonces $y = f(a)$") deja de ser privilegiado y se abre paso a la necesidad de establecer comportamientos de las formas de las curvas a través de colocar un rastro ("trace" en la calculadora) sobre la curva y por la localización de x con el cursor. En el mismo sentido, los dominios de las funciones no son establecidos a través de resolver ecuaciones, sino más bien, por medio de "recorrer" el cursor hacia la izquierda o derecha, además de acercarse o alejarse (*zoom*). En caso de que se requiera conocer aspectos locales de la función, se generan procedimientos que consisten en ir de lo global a lo local. Este conjunto de procedimientos favorece una conceptualización de función que relaciona la representación de una "curva completa" y la "función prototipo" a través de variar los parámetros de la función para buscar comportamientos.

El marco anterior provee argumentos específicos al analizar funciones en diferentes situaciones. Siendo la relación entre el comportamiento tendencial de las gráficas y la expresión analítica de las funciones el punto central de estos argumentos. La "curva completa" y la expresión $y = A[f(Bx + C)] + D$ se relacionan a través de construirle significados a los coeficientes A, B, C y D. Los procedimientos de los participantes consisten en mover la gráfica (traslaciones y transformaciones) para encontrar el patrón de comportamiento de la expresión $y = A[f(Bx + C)] + D$, y viceversa. Al variar los parámetros A, B, C y D, se identifican los patrones de comportamiento de la gráfica. Los parámetros son las variables de la función, no en sí, la variable *x:* la expresión $y = A[f(Bx+C)]+D$, es sustituida por $Y(A,B,C,D)$. La concepción de función predominante está relacionada con aspectos globales de la función*,* es decir, la curva es un objeto que se mira en forma completa. No se percibe explícitamente un proceso previo a la gráfica, sino que la función y la curva se consideran como los objetos a operar. En ese sentido *la concepción de función* pasa a ser *una instrucción que organiza comportamientos.*

Resumiendo, el hecho de que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable, significa que la graficación es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Es en sí misma una modelación, pero modelación no significa una "herramienta didáctica" que ayuda o facilita a construir el concepto de función, sino es una actividad que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión. Tal práctica es la que se tendrá que desarrollar en el sistema educativo y no así, como se ha pretendido, fallidamente, hasta ahora, desarrollar el concepto de función con ayuda de varias herramientas, por ejemplo, la modelación.

3. ¿CUÁL ES SU RELACIÓN CON LA TECNOLOGÍA?

Una de las acepciones de la tecnología consiste en considerarla como el conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico o como el lenguaje propio de una ciencia o de un arte. Esto significa que la tecnología es una componente del conocimiento, es parte, insoslayable, de su desarrollo. Me parece que tal significado no es el mismo para la enseñanza de las matemáticas. La tecnología, todavía, vive separada de la enseñanza de las matemáticas. Es un ente externo que requiere de una intensa negociación para ser incorporada, intencionalmente, en los procesos de aprendizaje. Se convierte en un problema cultural, tal vez por la creciente oferta de mercado en la industria tecnológica educativa. Inevitablemente, hay una plusvalía tecnológica educativa con relación a la enseñanza de las matemáticas. Seguramente semejante hecho tiene que ser estudiado a profundidad para entender los efectos en el sistema educativo. De cualquier manera, una realidad de este hecho consiste en que hay una tecnología educativa en boga (graficadores y sensores): diversos estudios, en la matemática educativa, con diferentes perspectivas teóricas, dan muestra que el uso adecuado de tales graficadores y sensores ayudan a crear habilidades (cognitivas) a los participantes para construir conocimiento matemático (Blum et al, 2002). Actualmente sería un error ignorar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Pero para el tema que nos ocupa, el cual consiste en explicar la relación de la modelación con la tecnología, nos interesa señalar que la graficación juega un papel importante, incluso tal vez convenga llamarle la categoría (epistemológica) que articula a la modelación y tecnología. Esto es, si usamos los graficadores y sensores como instrumentos de modelación, no como instrumentos para representar el concepto de función, la graficación sería anclada como un dominio de conocimiento, con el cual modelaríamos y simularíamos a través de situaciones reales o virtuales.

Para darle mayor consistencia a lo que hemos expresado sobre el papel de la graficación, vemos el caso de la *linealidad del polinomio* (Rosado, 2004).

Una experiencia que se llevó a cabo en diferentes escenarios escolares (salones de clase y talleres con profesores de matemáticas), consistió en hacer la siguiente pregunta típica de cálculo:

> *Considere la función* $P = a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. *Halle la recta tangente en el punto* $(0, P(0))$.

La mayoría de los participantes respondieron satisfactoriamente, usando los métodos de cálculo aprendidos previamente:

a) Derivar el polinomio *P*: $P' = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}\ (n-1)x^{n-2} + \ldots a_2 x + a_1$
b) Evaluar P' en $x = 0$ para encontrar la pendiente en ese punto: $P'(0) = a_1$
c) Sustituir la pendiente $P'(0)$ en la fórmula analítica de la pendiente de una recta:

$$P'(0) = m = \frac{y - y(0)}{x - 0}$$

d) Despejar la variable y para obtener la ecuación de la recta tangente:

$$y = a_1 x + a_0 .$$

Sin embargo, nadie identificó que la recta tangente era precisamente la parte lineal del polinomio dado. Ni mucho menos reflexionó con respecto al comportamiento del polinomio según la pendiente de la recta tangente en el punto $(0, P(0))$.

Por una parte, pareciera ser que este tipo de preguntas se convierten en rutinarias de tal suerte que no hay más que reflexionar, sino sólo calcular. Por otra parte, pareciera que el discurso matemático escolar privilegiara las propiedades algebraicas de los polinomios, por ejemplo, cuando pueden ser expresados como productos de factores lineales:

$$P = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

O bien, identificar el término de la potencia mayor $a_n x^n$, de la estructura del polinomio $P = a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, para determinar el grado del polinomio.

Tales propiedades del polinomio en la matemática escolar no se alcanzan a relacionar, por un lado se calculan rectas tangentes en algún punto particular de la gráfica de un polinomio, y por el otro, se calculan los ceros del polinomio a través de métodos algebraicos y analíticos, con el objetivo de brindarle al estudiante herramientas o métodos para que puedan discernir sobre el comportamiento del polinomio. Sin embargo, el objetivo conceptual del currículo escolar obliga a enfocar la atención en la herramienta o método analítico (calcular rectas tangentes o calcular los ceros del polinomio) y no así en el comportamiento del polinomio. Tal vez por ello, dentro de ese marco, la linealidad del polinomio no compone un eje argumentativo para poder predecir el comportamiento del polinomio en un ambiente gráfico.

Esta propiedad puede enunciarse de la siguiente manera:

En todo polinomio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, la parte lineal $a_1 x + a_0$ es la ecuación de la recta tangente a la curva de $P_n(x)$ en x_0=0 (Figura 3.1).

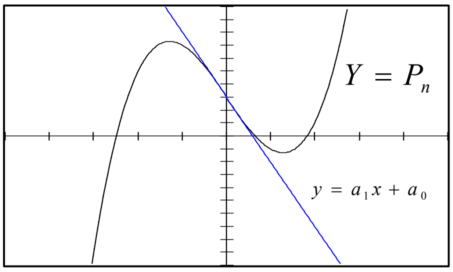

Figura 3.1. La recta $y = a_1 x + a_0$

La actividad de la linealidad del polinomio consiste en formular una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento consistiría en establecer relaciones entre una función polinómica y la ecuación de una recta, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando *x* toma valores en un intervalo de cero, con ello el estudiante reconstruirá significados a las relaciones (ver Figura 3.2).

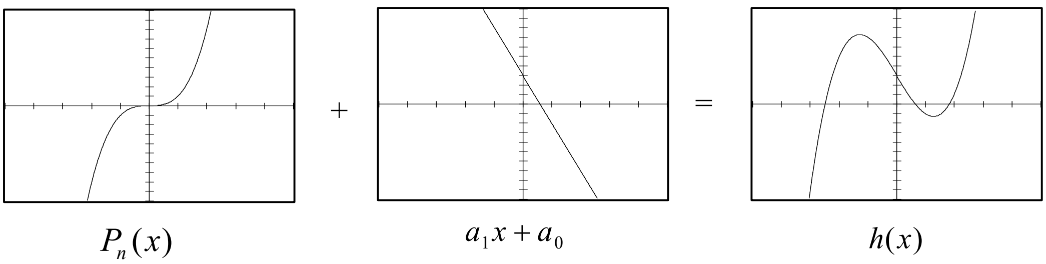

Figura 3.2. $h(x) = P_n(x) + recta$

Se generan argumentos para predecir el comportamiento de las gráficas de funciones polinómicas, sin necesidad de realizar procedimientos analíticos, basándose únicamente en la forma algebraica del polinomio. Y viceversa, a partir de la forma de la gráfica estimar la función polinómica (Figura 3.3)

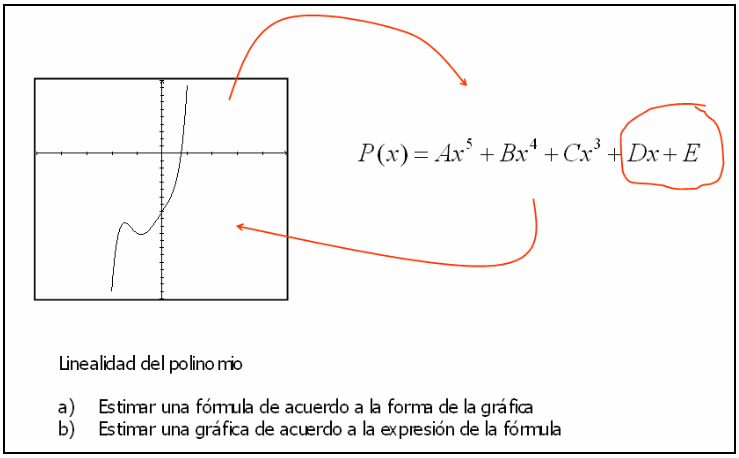

Figura 3.3. Linealidad del polinomio

Es así como la linealidad del polinomio es un argumento gráfico, el cual consiste en identificar que la parte lineal de cualquier polinomio es precisamente la recta tangente a la curva del polinomio, en el punto $(0, P(0))$. La derivada es intrínseca al polinomio, sin embargo, no es explícitamente el argumento gráfico. En cambio, el comportamiento con tendencia de la curva del polinomio es el argumento. La linealidad adquiere importancia cuando es resignificada como la recta que se le suma al término de mayor potencia del polinomio para afectar su comportamiento. La variación de parámetros de la recta ayuda a identificar un patrón de comportamiento de la curva del polinomio con tendencia, el cual consiste en que la curva tiende a comportarse como la recta en la vecindad del cero, y fuera de ésta las "ramas" de la curva recuperan su comportamiento de acuerdo a la potencia mayor del polinomio. Con tal argumento, se generan relaciones gráficas y analíticas:

a) A partir de la parte lineal del polinomio se pude predecir (bosquejar la gráfica) el comportamiento del polinomio.
b) A partir del comportamiento de una curva (gráfica) se puede estimar el polinomio correspondiente.

Este ejemplo está proponiendo un tratamiento diferente de las gráficas para atender la problemática de enseñanza de las matemáticas. Conviene didácticamente enfocar la atención al *uso de las gráficas* en el sistema educativo. En ese sentido, deberemos ir conociendo con profundidad los métodos de uso de las gráficas, comprender las gráficas según su funcionamiento y forma, así como sus resignificaciones, todo ello a través de las clases de actividades que generan las prácticas institucionales. Con ello, tendremos un dominio de conocimiento del uso de las gráficas en el sistema educativo, de ahí la importancia de considerar a la tecnología intrínseca a la modelación: el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas (SEP, libros de texto gratuito: 2003-2004), el uso del plano cartesiano y de los ejes cartesianos, los privilegios del primer cuadrante, los sistemas autónomos del tiempo, las diferencias de usos entre curvas (Euler, 1748) y gráficas de las funciones (Flores y Cordero, 2004 y Campos, 2003).

Con el hecho anterior, se vislumbra un binomio con relación a la tecnología, modelación-graficación, pero la graficación es la categoría a desarrollar en el sistema educativo, puesto que, por una parte, tiene intrínseca la modelación y, por la otra parte, la tecnología se integra a dicha categoría generando una jerga de herramientas propia de la situación en cuestión. Del uso de este binomio se derivarán diferentes escenarios para construir conocimiento matemático, tendremos que aprender a observar los procesos de aprendizaje de los participantes a través de los *usos* y *argumentaciones* de dicho conocimiento, posiblemente en una aula de computo haciendo simulación virtual, o en una mesa de trabajo discutiendo entre los miembros de un equipo los comportamientos gráficos que brinda una calculadora, o realizando acciones de movimiento en pequeños grupos para interpretar las simulaciones según los sensores.

4. ¿CUÁLES DEBERÁN SER LOS CAMBIOS CURRICULARES?

Esta sección no tiene como propósito abordar aspectos metodológicos que lleven a la realización de un cambio curricular, pero sí a formular indicadores que ayudarán a ver su inevitable transformación.

Sobre el currículo. Existen dificultades acerca del desarrollo de las estructuras y de los conceptos matemáticos en el sistema educativo. Por ejemplo, la suma, $a+b=c$; las enésimas derivadas en la serie de Taylor, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+...$; la suma de funciones, $f=g+h$ y las ecuaciones diferenciales lineales: $ay'+y=f$, aparecen en el currículo y en diferentes niveles escolares. Sin embargo, a priori, no se sabe cómo tales estructuras y conceptos se relacionan, ni mucho menos que tuvieran carácter funcional. Una experiencia escolar (educación básica) de la suma, $a+b=c$, no tendría por qué dar cuenta del Cálculo (educación superior), sobre todo si queda en el nivel utilitario. Asimismo, la suma de funciones $f=g+h$, en la experiencia escolar (educación media), no tendría que dar cuenta de la estabilidad de ecuaciones diferenciales, $ay'+y=f$ (educación superior). Sin embargo, todos estos conceptos y estructuras, a pesar de la situación mencionada, pueden vivir aislados entre ellos en el sistema educativo, de ahí sus dificultades (Cordero, 2003).

Sobre el modelo de construcción del conocimiento matemático. Haber considerado la actividad matemática como el modelo de construcción matemática para atender la problemática de enseñanza, ha llevado a formular epistemologías que, en el mejor de los casos, han ayudado a tener cierto entendimiento de los conceptos y sus desarrollos, pero difícilmente logra establecer relaciones funcionales que integren o unifiquen dichas estructuras y conceptos a lo largo del sistema educativo. Cantoral y Farfán (2003) ofrecen un análisis de la evolución de la matemática educativa para señalar que el conocimiento matemático fue primeramente considerado con una didáctica sin alumnos hasta haber entendido la necesidad insoslayable de incorporar a la didáctica escenarios socioculturales.

Estos dos aspectos hablan de un currículo y una epistemología de conceptos. Ambas establecen secuencias, una corresponde a un orden lógico estructural y la otra, corresponde a un orden de construcción (acción, formulación y validación). A priori, tales secuencias no explican lo que constituye tales conceptos, es decir, no dan cuenta de las prácticas sociales que generaron tales conceptos. Si nos imagináramos la posibilidad de sustituir las prácticas sociales por los conceptos señalados anteriormente en el sistema didáctico (ver Figura 4.1), tendríamos como una consecuencia categorías del conocimiento matemático alusivas a tales prácticas, tales como la predicción, la modelación, la comparación, el cambio y la variación (Cordero, 2003). Dentro de estas categorías habría una red de conceptos y estructuras: la suma numérica y de funciones, la estabilidad y las derivadas sucesivas. La acción imaginaria, da señales de que no es el estudio en sí mismo de las estructuras y conceptos quien logrará las relaciones funcionales, sino el de las prácticas. Siendo así, todos los procesos escolares deberían ayudar a resignificar y argumentar hasta alcanzar dichas relaciones.

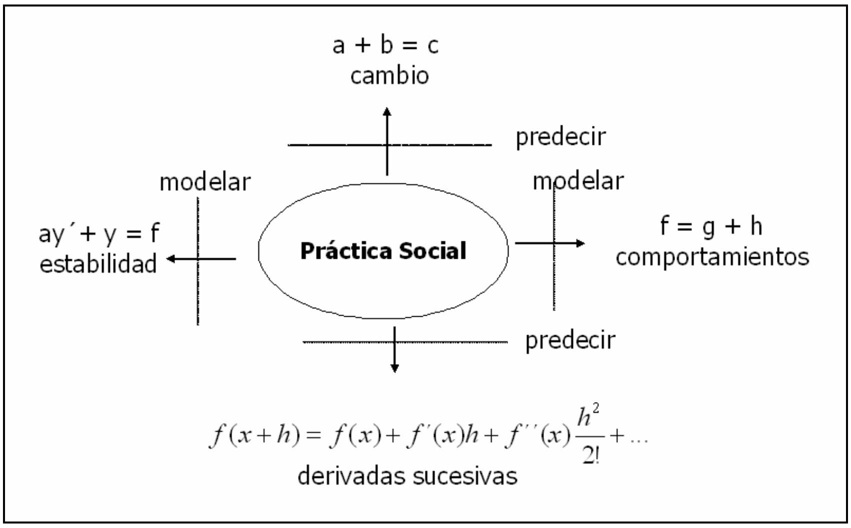

Figura 4.1. Reconstrucción de significados y argumentos en el sistema didáctico

En el marco de estas consideraciones las estructuras y conceptos son situaciones que se resignifican a través del desarrollo de las prácticas sociales. Existen investigaciones fundamentales que dan cuenta de este hecho (Farfán, 1997; Cantoral, 2001; Cordero, 2002, Arrieta, 2003; Martínez, 2003; Castañeda, 2004; Buendía, 2004 y Buendía y Cordero, 2004).

La suma $a+b=c$, es una situación de cambio que será resignificada hasta alcanzar la analiticidad de las funciones: la serie de Taylor $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots$, significa las derivadas como sucesivas y simultáneas y no como la iteración de las enésimas derivadas (González, 1999). Estas resignificaciones son el resultado de ciertas prácticas sociales como lo es la predicción (Cantoral, 2001). El desarrollo de ésta pudiera lograr la relación funcional en el sistema educativo, puesto que se pueden diseñar situaciones donde la predicción sea el argumento que permita generar la resignificación de lo que varía para cantidades discretas y continuas, estableciendo procedimientos cada vez más complejos para expresar cantidades que se transforman y que fluyen: desde un juego de canicas para predecir un nuevo monto de canicas $a+b=c$ *(a* es la cantidad que se transforma a la cantidad c y b es la variación*)* hasta predecir la posición de un móvil con respecto al tiempo $f(t+h)\approx f(t)+f'(t)h$ *(f(t)* es la posición inicial y $f(t+h)$ es la nueva posición, y $f'(t)h$ es la variación). Asimismo, la suma de funciones $f=g+h$ significa una situación de comportamiento local y global que tendrá que ser resignificado hasta alcanzar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales $ay'+y=f$, por medio de la modelación o bien graficación como una práctica social (Cordero, 1998 y 2001 y Solís, 2002). Los diseños de situación de transformación de funciones están compuestos de argumentos de graficación (comportamiento tendencial) que generan resignificados del comportamiento gráfico estableciendo procedimientos cada vez más complejos de los parámetros de las transformaciones: traslaciones de gráficas, linealidad del polinomio, asíntota de las funciones y estabilidad de las ecuaciones diferenciales (Cordero, 2001; Cordero, et al 2003; Domínguez, 2003; Dubinsky, et al, 2003; Hernández, 2004 y Rosado, 2004).

Entonces, si la demanda social fuera formar “matemáticos funcionales” en contraparte del “matemático utilitario”, sin duda el foco de atención estará en el desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico. Consecuentemente, el modelo de construcción estará basado en las prácticas sociales.

Sobre el desarrollo de las prácticas en el sistema educativo**.** Se ha explicado la naturaleza de la problemática y el papel que desempeña las prácticas de los grupos humanos, en esencia se ha dicho que se parte del hecho social, en el que cualquier grupo humano se vale de prácticas para generar conocimiento. El desarrollo de éstas depende de la organización, de la cultura y de la historia de los grupos humanos. En ese sentido, estas prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforman realmente (materialmente) los objetos, resignificando así al conocimiento. La resignificación quiere decir que el conocimiento, el pensamiento es un aspecto necesario de la actividad, pero un aspecto tal que por sí mismo no modifica el objeto, sino se requiere de la práctica. Asumir este hecho social lleva a formular a la problemática de la enseñanza de la matemática como una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Ambas de naturaleza y funciones distintas, sin embargo la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera. Entonces se requiere del estudio de las resignificaciones en los diferentes niveles escolares para rehabilitar categorías del conocimiento matemático que provienen de la actividad humana (Cordero, 2001; 2002 y Buendía y Cordero, 2004). La hipótesis consiste en considerar a la práctica social como la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño de la matemática escolar. Esta formulación creará una nueva base de entendimientos y construcciones donde la fuente de abstracción se encuentra en un ámbito de las prácticas. Las categorías tendrán un carácter funcional del conocimiento matemático (Cordero, 2001; 2002). Esto es, una vez que se identifiquen las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico, pues requieren de la intencionalidad para que se desarrollen en las condiciones del sistema. Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación (ver Figura 4.2) (Buendía y Cordero, 2004)

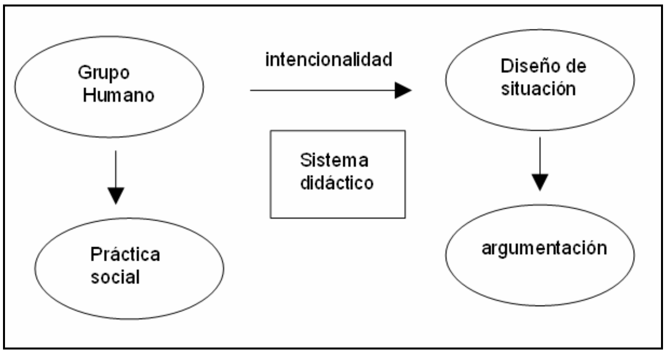

Figura 4.2. La práctica en lo social y la argumentación en lo situacional

Lo social innegablemente reformula y amplía la problemática, la visión y la perspectiva de la matemática educativa. En ese sentido se ha percibido que el papel de la graficación en el conocimiento matemático es una práctica social. Se ha visto en los ámbitos escolares y no-escolares la necesidad de graficar para entender los datos de ciertas situaciones, pareciera que graficar no sólo es competencia de la cognición, sino que es una práctica social que ha permitido generar cierto conocimiento matemático (Roth y Bowen, 2001). En ese sentido investigamos en ciertos ambientes gráficos escolares los procesos de construcción que están con relación a la modelación y el uso de las herramientas matemáticas. Para ello, hemos elegido, por una parte, las transformaciones de funciones y por otra, el uso de calculadoras graficadoras y sensores. Las transformaciones nos permitirán entender el desarrollo de la graficación, y la tecnología nos permitirá entender los aspectos y formas de la actividad humana que transforman o resignifican las relaciones funcionales que entran en juego en los ambientes gráficos. Para llevar a cabo esta tarea se han realizado las siguientes investigaciones que tendrán que ser reproducidas en el sistema educativo para lograr una escuela de pensamiento y entonces vendrá la transformación curricular:

1. Una socioepistemología de la periodicidad. Se explica que la predicción como práctica social resulta ser un argumento para construir lo periódico (Buendía, 2004; Buendía y Cordero, 2004).
2. Las resignificaciones en la modelación. Se caracterizar a la modelación como una práctica social a través de situaciones de variación y cambio (Suárez, 2001; 2005 y Torres, 2004).

3. Las argumentaciones en las transformaciones de funciones cuando se ponen en juego los dos momentos del desarrollo de función: curva y relación funcional. Se formula una epistemología de la transformación de funciones donde se confronta la concepción de curva y función, y se diseña la situación didáctica (Campos, 2003).
4. Las argumentaciones en la modelación del movimiento del resorte: la ecuación diferencial de segundo orden y la función "continua a trozos". Se formula una epistemología para modelar el movimiento del resorte donde se confronta las concepciones de continuidad euleriana y moderna para establecer la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial, y se diseña la situación didáctica (Hernández y Cordero, 2002).
5. Las argumentaciones de la simetría de los parámetros de las transformaciones de funciones: las funciones algebraicas y trigonométricas. Se formula la epistemología de la transformación de funciones donde se confronte las interpretaciones (los pensamientos) de las funciones algebraicas y trigonométricas (González y Cordero, (2002).

REFERENCIAS

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*, Tesis de Doctorado, no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Blum, W., et al. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 1-2, 149-171.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis de Doctorado, no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Buendía, G. y Cordero, F. (2004). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics* (aparecerá Núm. 59, V.2, 2005).

Campos, C. (2003) *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution, *Educational Studies in Mathematics* 53, 255-270.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Pearson Educación. Prentice Hall.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis del Doctorado no publicada, Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame* Vol. 16, Tomo 1, pp. 73-78.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo*. Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica. Edición especial CASIO. Tercera edición.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Dubinsky, E., Codero, F. y Ferrari, M. (2003). *Arreglos Numéricos, Transformaciones de figuras Geométricas y Comportamientos de las funciones como Recursos del Álgebra Abstracta*. Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica

Euler, L. (1978). *Introduction to Analysis of the Infinite* Trad. (Book II). Springer-Verlag, 1990.

Flores, R. y Cordero, F. (2004). Uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, p. 249.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

González, R. y Cordero, F. (2002). Las argumentaciones de la simetría de los parámetros de las transformaciones de funciones: las funciones algebraicas y trigonométricas. *Resúmenes de la 16ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. La Habana, Cuba. Vol. 16, pp. 305.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en escena en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x, x^2 y x^3*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hernández, J. y Cordero, F. (2002). Las argumentaciones en la modelación del movimiento del resorte: la ecuación diferencial de segundo orden y la función continua a trozos. *Resúmenes de la 16ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. La Habana, Cuba. Vol. 16, pp. 214

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis del Doctorado no publicada, Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Roth, W.-M., y Bowen, G.M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 159-194.

SEP Libros de texto gratuito. SEP, Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004.

Solís, M. (2002). Las nociones de predicción y simulación en ecuaciones diferenciales a través del comportamiento tendencial de las funciones. *Serie: Antologías Número 2*. Programa Editorial: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (Cimate). CLAME, UNACH y UVG.

Suárez, L. (2005). Modelación en Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 18 (aceptado para su publicación).

Suárez, L. (2001) Las actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo. *Serie Antologías*. Programa Editorial Red Nacional de CIMATES, Núm. 1, 335-345.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis de maestría no publicada, Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN.